Selbsttest – Exponentialfunktion 2

1) Bestimme die Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = \ln(4+3x^2)$ b) $f(x) = 5x \cdot \ln(4+x)$

2) Bestimme eine Stammfunktion von f.

a) $f(x) = \frac{4}{x}$ b) $f(x) = \frac{3}{2x}$

c) $f(x) = \frac{3}{6x-5} + e^{-2x}$

3) Löse die Gleichung.

a) $\left(x^2-4\right)e^{0,5x} = 0$ b) $e^{2x} - 6e^x = -5$

4) Berechne das Integral $\int_{-1}^{e-2} \frac{1}{x+2}\,dx$.

5) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$.

a) Bestimme den Tiefpunkt von f.
b) Bestimme den Wendepunkt von f.

6) Die Funktion f hat die Gestalt $f(x) = a \cdot e^{kx}$.
Bestimme die Parameter a und k, wenn $f(0) = 3$ und $f'(0) = 6$.

Selbsttest – Exponentialfunktion 2

Lösungen:

1) a) $f'(x) = \frac{1}{4+3x^2} \cdot 6x$ b) $f'(x) = 5 \cdot \ln(4+x) + 5x \cdot \frac{1}{4+x}$

2) a) $F(x) = 4 \cdot \ln|x|$ b) $F(x) = \frac{3}{2}\ln|x|$ oder $F(x) = 3\ln|2x| \cdot \frac{1}{2}$

c) $F(x) = 3\ln|6x-5| \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

3) a) $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$ oder $e^{0,5x} = 0 \Rightarrow$ keine Lösung

b) $e^{2x} - 6e^x = -5 \Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 5 = 0$ Subst.: $u = e^x$

$u^2 - 6u + 5 = 0 \Rightarrow u_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$

Rücksubst.: $u_1 = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x_1 = \ln 5$;

$u_2 = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x_2 = 0$

4) $\int_{-1}^{e-2} \frac{1}{x+2}\,dx = \left[\ln|x+2|\right]_{-1}^{e-2} = \ln e - \ln 1 = 1$

5) $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x$; $f''(x) = e^x + e^x + x \cdot e^x = (2+x)e^x$;

$f'''(x) = (3+x)e^x$

a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ($e^x > 0$ für alle x)

$f''(-1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow T\left(-1 \middle| -\frac{1}{e}\right)$

b) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + x = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ($e^x > 0$ für alle x)

$f'''(-2) = \frac{1}{e^2} \neq 0 \Rightarrow W\left(-2 \middle| -\frac{2}{e^2}\right)$

6) $f'(x) = ak \cdot e^{kx}$

(I) $f(0) = 3 \Leftrightarrow$ $\boxed{a = 3}$

(II) $f'(0) = 6 \Leftrightarrow ak = 6 \Rightarrow$ $\boxed{k = 2}$ (da $a = 3$)